Université d'Orléans
ECOLE SUPÉRIEURE DE L'ENERGIE ET DES MATÉRIAUX **Option : Spéciales M**

Le problème comporte trois parties. Ces trois parties sont indépendantes, à l'exception de la question **1 b)** *de la partie* **III**, *qui utilise les définitions de la partie* **I**.

Partie I

Définitions et notations

On note $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels.

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telles que la série $\sum a_n$ converge.

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telles que la série entière $\sum a_n x^n$ ait un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 (éventuellement infini).

Pour $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$, on considère l'application :

$$\left| \begin{array}{rcl} f_A : [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_A(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n. \end{array} \right.$$

Enfin on dit qu'*une série* $\sum a_n$ *converge au sens d'Abel* si :

i) $(a_n) \in \mathcal{S}$

ii) f_A admet une limite à gauche en 1. Cette limite s'appelle *la somme d'Abel de la série* $\sum a_n$.

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des éléments $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}$ tels que $\sum a_n$ converge au sens d'Abel. Lorsque A est élément de $\mathcal{A}$ on prolongera f_A en 1 en posant $f_A(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f_A(x)$ et on notera encore f_A la fonction ainsi prolongée.

1) **a)** Montrer que $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$.

b) Montrer que si $\sum a_n$ converge au sens d'Abel, alors la fonction f_A associée est continue sur $[0,1]$.

c) Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$.

2) Etudier, dans les cas suivants, la convergence au sens usuel et la convergence au sens d'Abel, en précisant, quand elles existent, la valeur de la somme usuelle et de la somme d'Abel de la série $\sum a_n$ pour :

a) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}$.

b) $a_n = (-1)^n(n+1)$.

c) $a_0 = 0$, et $a_n = \dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Les deux types de convergence coïncident-ils ?

3) Dans cette question on veut montrer que $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$.

Soit $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\mathcal{C}$, ce qui signifie que la série $\sum a_n$ converge. On note S sa somme et R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

a) Montrer que $R \geqslant 1$, et que si $R > 1$, alors la série $\sum a_n$ converge au sens d'Abel et sa somme d'Abel est S.

b) On suppose que $R = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$, et $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ pour x réel tel que $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Soit ε un réel, $\varepsilon > 0$.

i) Montrer qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $|R_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

ii) Justifier, pour tout entier n et pour tout entier $p > n+1$, l'égalité :

$$\forall\, x \in [0,1],\quad S_p(x) - S_n(x) = x^{n+1}R_n + \sum_{k=n+1}^{p-1} (x^{k+1} - x^k)R_k - x^pR_p.$$

iii) En déduire que, pour tout $n \geqslant N$ et pour tout $p > n+1$:

$$\forall\, x \in [0,1],\quad |S_p(x) - S_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\left(x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{p-1} (x^k - x^{k+1}) + x^p\right).$$

iv) Montrer que la suite (S_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction $\widehat{f}$ que l'on précisera.

v) Conclure.

c) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

4) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels qui converge vers 0. Pour $n \geqslant 1$, on pose $v_n = \frac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que la suite (v_n) converge vers 0.

5) Soit $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\mathcal{A}$ tel que $(na_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. On veut montrer que $A \in \mathcal{C}$.

On pose, pour $n \in \mathbf{N}^*$, $b_n = f_A\left(1-\frac{1}{n}\right) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ (pour la définition de f_A, voir *Définitions et notations*).

a) Montrer que pour $x \in]0,1[$ et $k \in \mathbf{N}^*$, on a $|(1-x)^k - 1| \leqslant kx$.

b) Montrer que pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $k \in \mathbf{N}^*$, $\left|\left(1-\frac{1}{n}\right)^k - 1\right| \leqslant \frac{k}{n}$.

En déduire que $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^k - 1\right)a_k\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} k\,|a_k|$.

c) Montrer que $B_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k a_k$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

d) Déduire de 4) et de a),b) et c), que (b_n) tend vers 0 quand n tend vers l'infini, puis conclure.

6) Si $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$, on pose $\|A\| = \displaystyle\int_0^1 |f_A(t)|\,dt$.

a) Montrer que $A \mapsto \|A\|$ est une norme sur $\mathcal{A}$.

b) Calculer $\|A\|$ pour chacun des exemples de 2), lorsque cela a un sens.

c) On définit l'application $\left|\begin{array}{l}\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{R} \\ \qquad A \longmapsto \varphi(A) = \text{Somme d'Abel de } A.\end{array}\right.$

Montrer que φ est linéaire mais qu'elle n'est pas continue.

Partie II

On appelle *famille de Bertrand* une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'applications continues de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^+$ qui vérifie :

i) Il existe un réel $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et pour tout $t \in \mathbf{R}^+$, $0 \leqslant f_n(t) \leqslant M$.

ii) L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels. On dit que *la série* $\sum a_n$ *converge au sens de* (f_n) si :

i) Pour tout $t \in \mathbf{R}^+$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n f_n(t)$ existe ; on note alors $f(t)$ cette somme.

ii) L'intégrale généralisée $S' = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge ; S' s'appelle alors *la* (f_n)*−somme de la série* $\sum a_n$.

1) On pose, pour $n \in \mathbf{N}$ et $t \in \mathbf{R}^+$, $f_n(t) = \dfrac{t^n \mathrm{e}^{-t}}{n!}$.

a) Calculer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $M_n = \underset{t\geqslant 0}{\mathrm{Sup}}\, f_n(t)$.

b) Montrer que la suite (M_n) est décroissante.

c) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une famille de Bertrand.

d) Etudier la convergence au sens de (f_n) de la série $\sum a_n$ pour : **i)** $a_n = (-1)^n$. **ii)** $a_n = (-1)^n n$.

2) Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on définit l'application f_n de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$ par :

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t-(n+1)| > 1 \\ 1-|t-(n+1)| & \text{si } |t-(n+1)| \leqslant 1. \end{cases}$$

a) Représenter graphiquement f_0, f_1, f_2 et f_3.

b) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une famille de Bertrand.

c) Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels. Montrer que $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n f_n(t)$ existe pour tout $t \in \mathbf{R}^+$, et donner sa valeur sur l'intervalle $[p, p+1[$, où $p \in \mathbf{N}$. En déduire, pour $p \in \mathbf{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_p^{p+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

d) Montrer que si la série $\sum a_n$ converge au sens usuel, alors elle converge au sens de (f_n), et donner un contre-exemple pour montrer que la réciproque est fausse.

3) On donne une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que la série $\sum a_n$ converge absolument. On note S sa somme. On veut démontrer que si (f_n) est une famille de Bertrand, alors la série $\sum a_n$ converge au sens de (f_n) et que sa (f_n)-somme est égale à S.

a) Montrer que la série de fonctions $\sum a_n f_n$ converge normalement sur $[0, +\infty[$. On note f sa somme.

Montrer que pour tout réel $X \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^X f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(a_k \int_0^X f_k(x)\,\mathrm{d}x \right)$.

b) On pose, pour tout réel $X \geqslant 0$, $v_k(X) = a_k \displaystyle\int_0^X f_k(x)\,\mathrm{d}x$.

Montrer que la série de fonctions $\sum v_k$ converge normalement sur $[0, +\infty[$. En déduire que la série $\sum a_n$ converge au sens de (f_n) et que la (f_n)-somme de $\sum a_n$ est égale à S.

Partie III

Soit $p \in \mathbf{N}$, $p \geqslant 2$, et $\mathcal{P}_p$ l'ensemble des suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels qui vérifient, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_{n+p} = a_n$.

On pose, pour $A = (a_n) \in \mathcal{P}_p$, $\psi(A) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k$ et $\theta(A) = (a_0, a_1, \ldots, a_{p-1})$.

Il est clair qu'un élément A de $\mathcal{P}_p$ est totalement déterminée par la donnée de $\theta(A)$.

1) Soit $A = (a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un élément de $\mathcal{P}_p$.
   a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum a_n$ converge.
   b) Montrer que la série $\sum a_n$ converge au sens d'Abel si et seulement si $\psi(A) = 0$.

   On pose : $\mathcal{H} = \{ A = (a_n) \in \mathcal{P}_p \mid \psi(A) = 0 \}$.

2) Montrer que $\mathcal{H}$ est un espace vectoriel de dimension $p-1$ sur $\mathbf{R}$.

   Pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, on note U_k la suite, appartenant à $\mathcal{P}_p$, telle que :

$$\theta(U_k) = (1, 0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots, 0)$$

   (-1 étant la $(k+1)$–ième composante du p–uplet).

3) Montrer que $(U_1, U_2, \ldots, U_{p-1})$ est une base de $\mathcal{H}$.

4) On considère l'application $\left| \begin{array}{l} D : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \\ (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \longmapsto (b_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ définie par : } b_n = a_{n+1}. \end{array} \right.$

   Montrer que D est linéaire et donner sa matrice dans la base $(U_1, \ldots, U_{p-1})$.

5) On note $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $M \in \mathcal{M}_{p-1}(\mathbf{R})$.

   a) Calculer M^p et le déterminant de M.
   b) Déterminer les valeurs propres réelles de M et préciser les vecteurs propres associés. (On sera amené à distinguer les cas p pair et p impair.)

6) On donne la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. On considère que c'est la matrice d'un endomorphisme f d'un espace vectoriel réel E de dimension 3, dans une base (e_1, e_2, e_3) donnée.
   a) Montrer que -1 est valeur propre de M, de multiplicité 1. On note E_1 le sous-espace propre correspondant.
   b) Donner un polynôme annulateur de M de degré 3, et en déduire un sous-espace vectoriel F de dimension 2, stable par f et supplémentaire de E_1 dans E.
   c) Trouver une base (u_1, u_2, u_3) dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.